TEMA 8: GRAFOS

Definición

Un grafo simple G es un par $G = (V, E)$ formado por un conjunto finito de vértices V y un conjunto de pares no ordenados

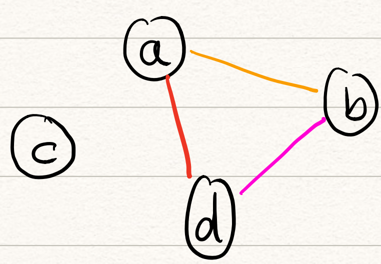
$$E \subset \{\{u, v\} \,/\, u, v \in V \text{ y } u \neq v\}$$

llamado aristas.

Ejemplo.

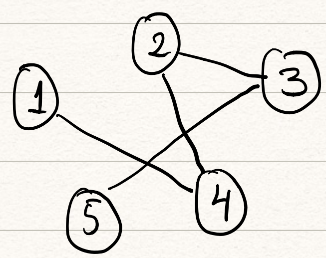
$V = \{a, b, c, d\}$

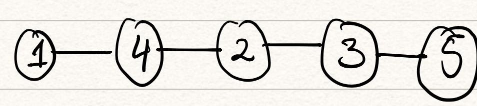
$E = \{\{a, b\}, \{a, d\}, \{b, d\}\}$



$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $\quad \{5, 3\}$

$E = \{\{2, 4\}, \{4, 1\}, \{3, 5\}, \{2, 3\}\}$





Observación: Un grafo simple no admite múltiples aristas, aristas bucles ni dirección en las aristas

Definición

Un multigrafo es un par (V, E) formado por un conjunto de vértices V y una familia finita de aristas no orientadas

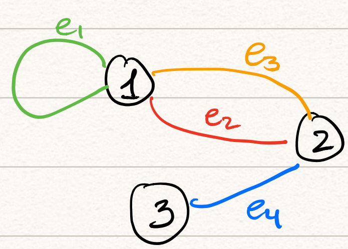
$$E = \{e_i\}$$

donde $e_i \in \{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$

Ejemplo

$$V = \{1, 2, 3\}$$

$$E = (\underset{e_1}{\{1,1\}}, \underset{e_2}{\{1,2\}}, \underset{e_3}{\overset{\{2,1\}}{\overset{\shortparallel}{\{1,2\}}}}, \underset{e_4}{\{2,3\}})$$

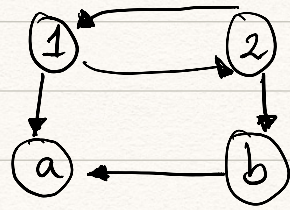


Definición

Un digrafo es un par (V, E) donde V es un conjunto finito y $E \subset V \times V$ sin admitir aristas bucles.

Ejemplo

$V = \{1, 2, a, b\}$, $E = \{(1,2), (2,1), (1,a), (2,b), (b,a)\}$



Observación: En un digrafo (ó grafo dirigido) no se admiten aristas repetidas ni bucles. La arista (1,2) y (2,1) del ejemplo anterior son distintas.

Definición

Un multidigrafo es un par (V, E) formado por un conjunto finito V y una familia finita

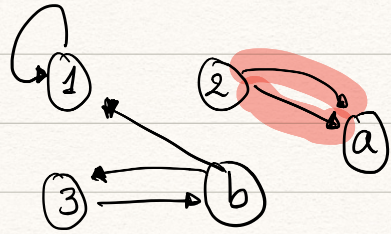
$$E = \{e_i\}$$

donde $e_i \in V \times V$

Ejemplo

$V = \{1, 2, 3, a, b\}$

$E = ((1,1), (2,a), (2,a), (3,b), (b,3), (b,1))$



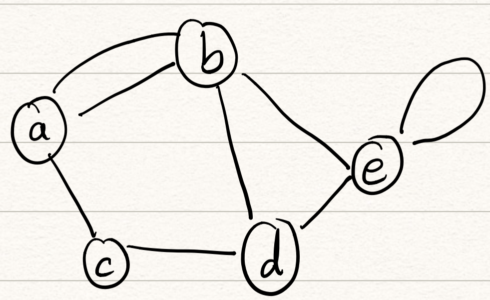
Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Diremos que los vértices u y v son adyacentes si $\{u,v\}\in E$.
También diremos que la arista $\{u,v\}$ es incidente con los vértices u y v.

Definimos el grado de un vértice como el número de aristas incidentes con él, imponiendo que un bucle contribuye dos veces al grado. Se denotará por $gr(u)$. Diremos que un vértice es un vértice aislado si su grado es cero.

Llamaremos sucesión de grados del grafo G a la lista $\{gr(v_1), gr(v_2), \ldots, gr(v_n)\}$ donde $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Ejemplo



$gr(a)=3$
$gr(b)=4$
$gr(c)=2$
$gr(d)=3$
$gr(e)=4$

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sucesión de grados: $\{3,4,2,3,4\}$

Ejercicio:

Construir un grafo que tenga la siguiente sucesión de grados: $\{3,2,1,4,3,1\}$

Teorema de Euler

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido. Entonces

$$\sum_{v\in V} gr(v) = 2\,Card(E)$$

Corolario

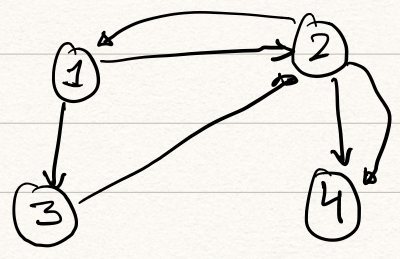
Todo grafo tiene un número par de vértices de grado impar.

Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo dirigido. Sea la arista $(u,v)\in E$. Diremos que u es el vértice inicial y v el vértice final de la arista (u,v).

Definimos grado de entrada de u al número de aristas que tienen a u como vértice final y lo denotamos por $gr^+(u)$. Y definimos el grado de salida de u al número de aristas que tienen a u como vértice inicial. Lo denotamos por $gr^-(u)$.

Ejemplo



$gr^+(1) = 1$, $gr^-(1) = 2$

$gr^+(2) = 2$, $gr^-(2) = 3$

$gr^+(3) = 1$, $gr^-(3) = 1$

$gr^+(4) = 2$, $gr^-(4) = 0$

REPRESENTACIÓN DE GRAFOS

Definición

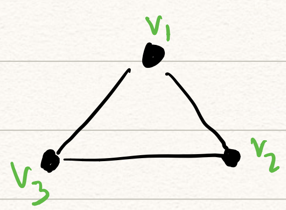
Sea $G=(V,E)$ un grafo simple ó un digrafo. Si $\operatorname{Card}(V)=n$ y $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$, definimos la matriz de adyacencia de G como la matriz $A\in M_n(\mathbb{R})$ definida como

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & \text{si } \{v_i,v_j\}\in E\\ 0 & \text{si } \{v_i,v_j\}\notin E\end{cases}$$

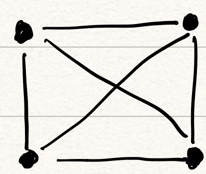
Ejemplo

Se define el grafo completo de n vértices, K_n, como aquel que todas sus aristas son adyacentes con el resto: → grafo simple

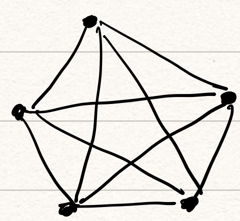
K_3



K_4



K_5

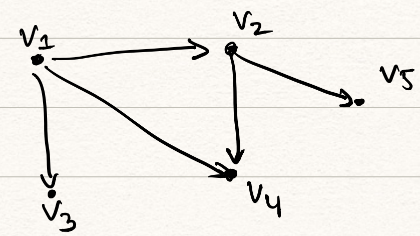


Matrices de adyacencia:

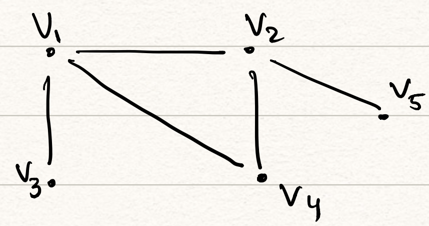
$$A=\begin{array}{c}\\ v_1\\ v_2\\ v_3\end{array}\!\!\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}v_1 & v_2 & v_3\end{array}\\ \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\end{array},\quad A=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1&1&1&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\1&1&1&0&1\\1&1&1&1&0\end{pmatrix}$$

Observación: La matriz de adyacencia de un grafo <u>no dirigido</u> es una matriz simétrica.

Ejemplo



$$A = \begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observación: Se puede extender el concepto de matriz de adyacencia a multigrafos y multidigrafos indicando en a_{ij} cuántas aristas hay que conecten el vértice v_i con v_j.

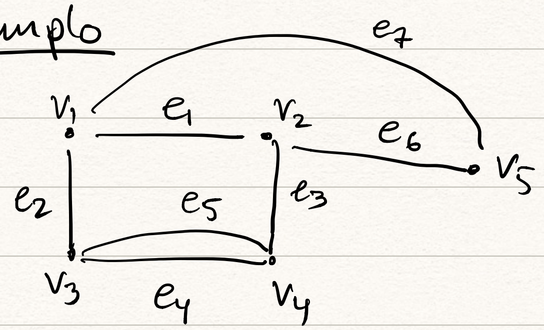
Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo no dirigido con $card(V)=n$ y $Card(E)=m$. y $V=\{v_1,\dots,v_n\}$, $E=\{e_1,\dots,e_m\}$

La matriz de incidencia de G respecto a la ordenación anterior es una matriz $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \in e_j \\ 0 & \text{si } v_i \notin e_j \end{cases}$$

Ejemplo



$$B = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

CAMINOS, CICLOS Y GRAFOS CONEXOS

Definición

Un camino de longitud n entre los vértices a y b de un grafo es una sucesión finita $(e_0, \ldots, e_{n-1})$ de aristas tales que

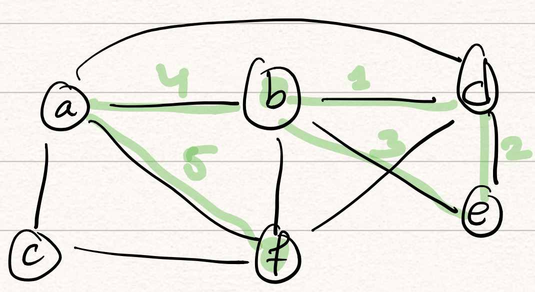
$$e_0 = \{a, v_1\},\ e_1 = \{v_1, \ldots, v_2\}, \ldots,\ e_{n-1} = \{v_{n-1}, b\}$$

Se dice que es un circuito si es camino cerrado, es decir, empieza y termina en el mismo vértice $(a=b)$

Se dice que es simple si no contiene a la misma arista más de una vez.

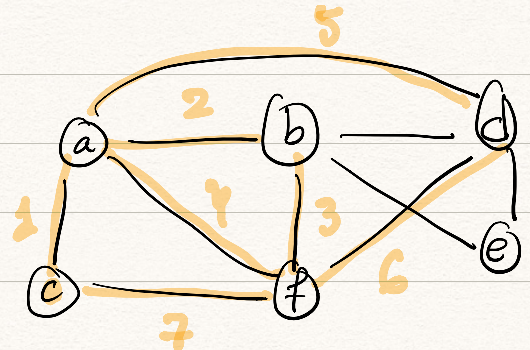
Se dice que es un ciclo si es un circuito que no pasa dos veces por el mismo vértice

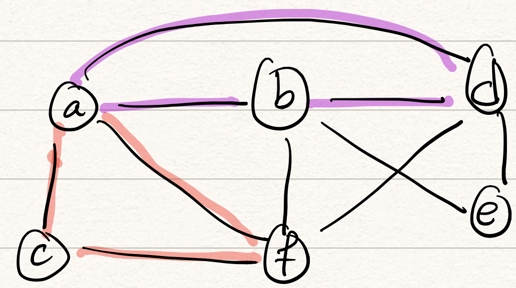
Ejemplo



Camino simple longitud 5 entre b y f

$(\{b,d\}, \{d,e\}, \{e,b\}, \{b,a\}, \{a,f\})$





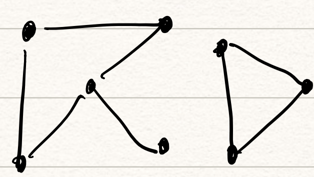
Circuito simple long. 7 empezando en c:
$(\{c,a\},\{a,b\},\{b,f\},\{f,a\},\{a,d\},\{d,f\},\{f,c\})$

Ciclo: $(\{a,f\},\{f,c\},\{c,a\})$
Ciclo: $(\{b,d\},\{d,a\},\{a,b\})$

Definición

Se dice que un grafo G es conexo si para cualquier par de vértices existe un camino entre ellos

Ejemplo



No es conexo
Tiene dos componentes conexas

Teorema

Sea G un grafo y sea A su matriz de adyacencia respecto al orden $v_1, v_2, \dots, v_n$ de su conjunto de vértices. Entonces el número de caminos de longitud m entre el vértice v_i y v_j es igual al coeficiente (i,j) de A^m.

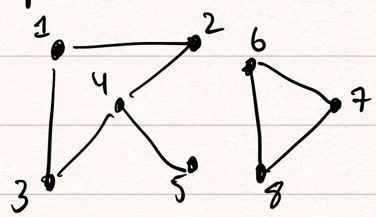
Corolario

Dado un grafo $G=(V,E)$ tal que $\mathrm{Card}(V)=n$, se verifica que G es conexo si y sólo si la matriz

$$C = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

tiene todos los coeficientes distintos de cero.

Ejemplo



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¿Qué sabremos decir de $C = I + A + A^2 + \cdots + A^7$?

$$C = \left(\begin{array}{c|c} 5\times 5 & 0 \\ \hline 0 & 3\times 3 \end{array}\right)$$

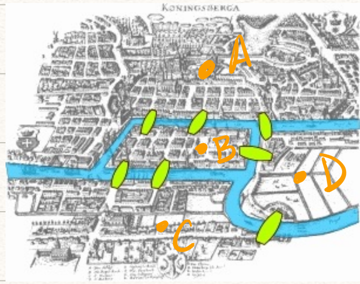
Ejercicio: Comprobarlo con el ordenador.

Observación: En un grafo no dirigido A es simétrica y por tanto es siempre diagonalizable.

Ejercicio: Reescribir la condición $C = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ sabiendo que A es diagonalizable.

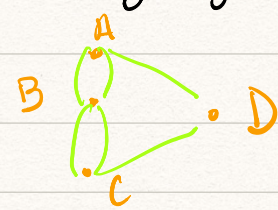
$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$

GRAFOS EULERIANOS Y HAMILTONIANOS



Puentes de Könisberg

¿Es posible dar un paseo comenzando desde cualquiera de estas regiones, pasando por todos los puentes, recorriendo sólo una vez cada uno, y regresando al mismo punto de partida?



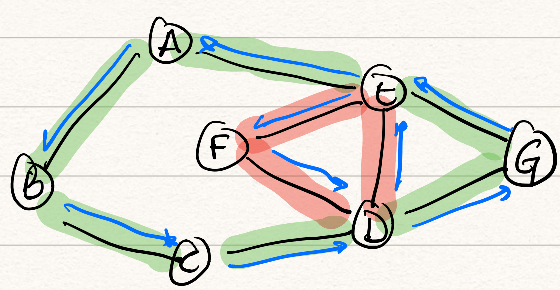
Definición

Sea G un grafo no dirigido. Diremos que un camino es un **camino euleriano** si es un camino simple que contiene todas las aristas de G. Y un **circuito euleriano** a un circuito simple que contiene todas las aristas de G.

G será un **grafo euleriano** si contiene un circuito euleriano.

Ejemplo

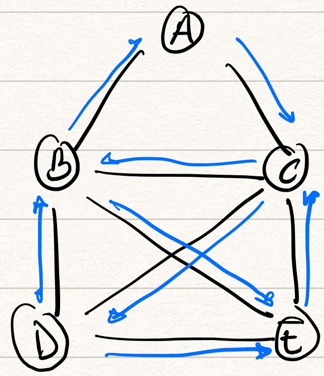
¿Son los siguientes grafos eulerianos?



ABCDGEA

EFDE

ABCDGEFDEA



No es un grafo euleriano pero contiene un camino euleriano.

DBCBECDE

Teorema

Un grafo no dirigido es euleriano si y sólo si todas las aristas están en la misma componente conexa y todos los vértices tienen grado par.

Proposición

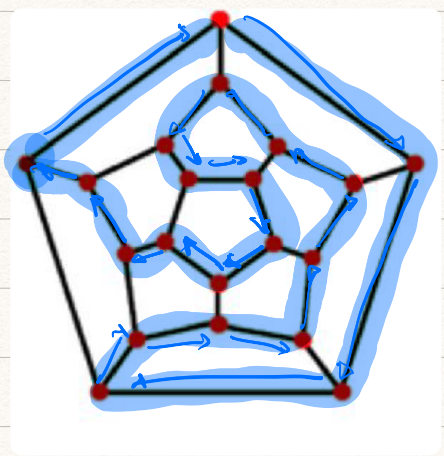
Un grafo no dirigido admite un camino euleriano si y sólo si tiene exactamente dos vértices de grado impar.

Definición

Sea G un grafo no dirigido. Se denomina camino hamiltoniano a cualquier camino simple que pase por todos los vértices de G, pasando una sóla vez por cada uno de ellos. Si es un circuito lo llamamos circuito hamiltoniano. Si un grafo no dirigido admite un circuito hamiltoniano lo llamaremos grafo hamiltoniano.

Ejemplo

Estudiar si el siguiente grafo es hamiltoniano.



Teorema (de Dirac)

Sea $G=(V,E)$ un grafo simple y conexo de $n \geq 3$ vértices tal que

$$gr(v) \geq \frac{n}{2} \quad \text{para todo } v \in V.$$

entonces G es hamiltoniano

ÁRBOLES

Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo simple. Diremos que es un árbol si ó:

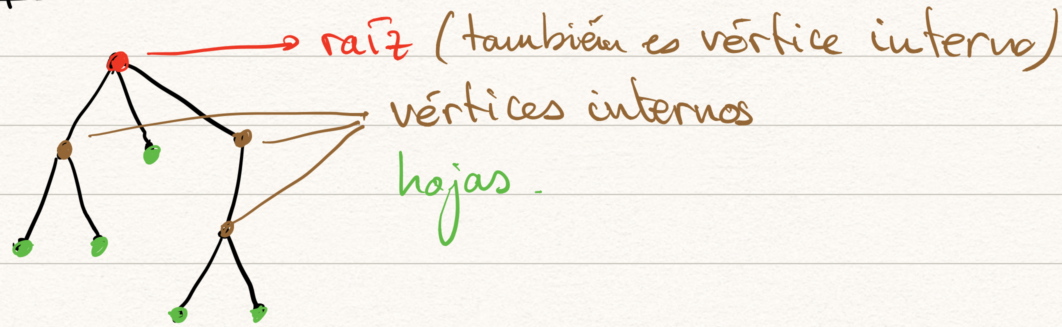
a) Es conexo sin bucles ni ciclos

b) Dados dos vértices existe un único camino de uno a otro

c) Si quitamos una arista tiene dos componentes conexas

d) $Card(E) = Card(V) - 1$

Ejemplo.

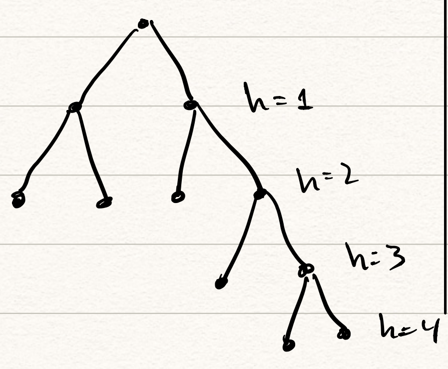


Definición

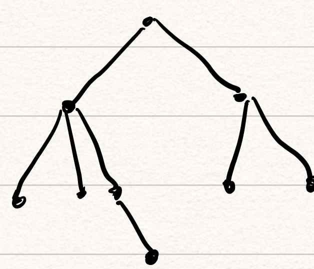
Diremos que un ==árbol es m-ario== si cuelgan a lo sumo m vértices de cada uno de sus vértices. Y es un ==árbol m-ario completo== si cuelgan 0 ó m vértices de cada uno de ellos.

Ejemplo

Árbol binario completo ($m=2$)



Árbol ternario ($m=3$)



Propiedades:

1) La altura h de un árbol m-ario completo con ℓ hojas es al menos $h \geq \log_m \ell$ ó $m^h \geq \ell$

2) En todo árbol m-ario completo se verifica:

$$n = m \cdot i + 1 \;,\; \ell = i(m-1)+1 \;,\; \frac{m}{m-1} = \frac{n-1}{\ell-1}$$

donde n es el número total de vértices, ℓ el número de hojas e i los vértices internos.

Ejercicio: Deducir la segunda y tercera expresión a partir de la primera.

BÚSQUEDA EN PROFUNDIDAD.

Dado un grafo vamos a obtener un subgrafo árbol que contenga todos los vértices (árbol recubridor) siguiendo un cierto criterio:

Algoritmo:

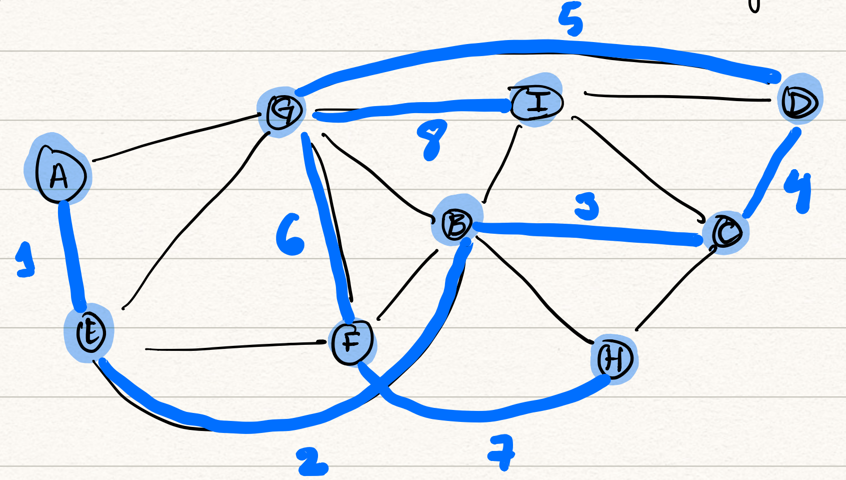
1) Partimos de un vértice arbitrario ó dado por el criterio.

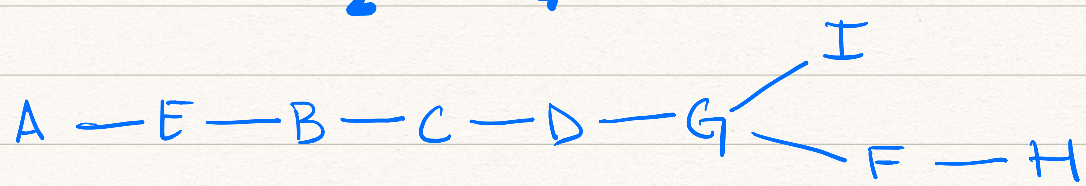
2) Comprobamos los vértices adyacentes. Si hay vértices válidos (no rompa la estructura de árbol) escogemos el que mejor siga el criterio y repetimos 2). Si no hay vértices válidos vamos a 3)

3) Retrocedemos y volvemos a 2). Si hemos vuelto al inicial y sigue sin haber vértices válidos hemos terminado.

Ejemplo.

Realizar una búsqueda en profundidad del siguiente grafo teniendo el criterio de orden alfabético:





BÚSQUEDA EN ANCHURA

Algoritmo:

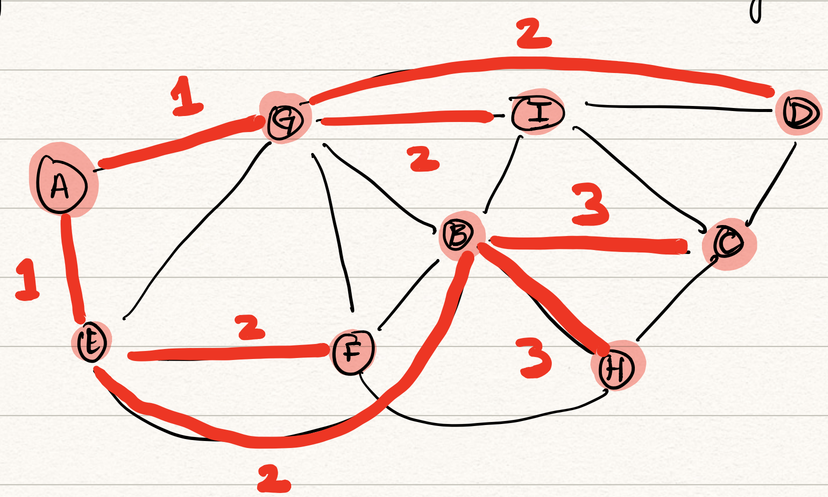
1) Partimos de un vértice arbitrario ó dado por el criterio.

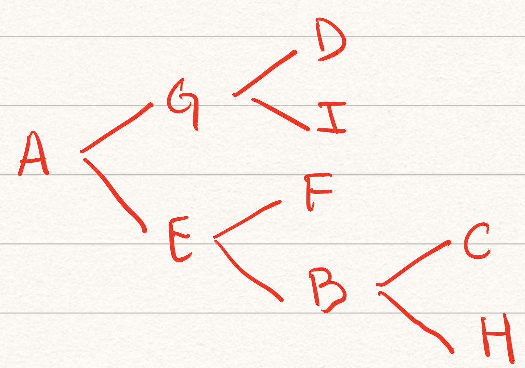
2) Comprobamos los vértices adyacentes. Si hay vértices válidos (no rompa la estructura de árbol) escogemos todos siguiendo el criterio y repetimos 2). Si no hay vértices válidos vamos a 3)

3) Retrocedemos y volvemos a 2). Si hemos vuelto al inicial y sigue sin haber vértices válidos hemos terminado.

Ejemplo.

Realizar una búsqueda en anchura del siguiente grafo teniendo el criterio de orden alfabético:





CÓDIGO PREFIJO

Vamos a construir un código de longitud variable que, dado una tabla de frecuencias, minimice la longitud de las palabras. Para ello vamos a aprovechar las propiedades de optimización de un árbol utilizando el Algoritmo de Huffman

Ejemplo

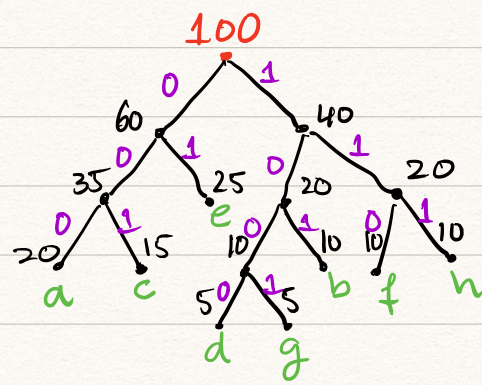
Supongamos que tenemos un texto donde las frecuencia de los caracteres son:

a	b	c	d	e	f	g	h
20	10	15	5	25	10	5	10

Construir un código binario que minimice la longitud de las palabras.

Vamos a reordenar las frecuencias de mayor a menor
Sumamos los dos últimos y volvemos a reordenar

- 25 20 15 10 10 10 $\underbrace{5\ 5}_{10}$
- 25 20 15 10 10 $\underbrace{10\ 10}_{20}$
- 25 20 20 15 $\underbrace{10\ 10}_{20}$
- 25 20 20 $\underbrace{20\ 15}_{35}$
- 35 25 $\underbrace{20\ 20}_{40}$
- 40 $\underbrace{35\ 25}_{60}$
- $\underbrace{60\ 40}_{100.}$
- 100.



a = 000 c = 001
b = 101 d = 1000
e = 01 g = 1001
f = 110 h = 111

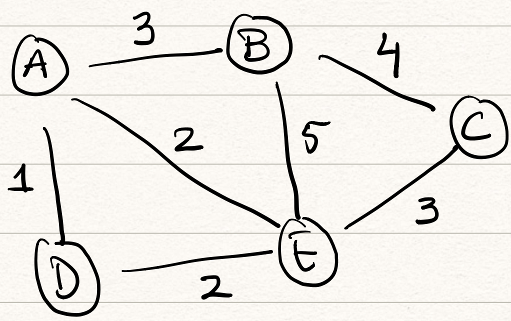
$\underbrace{001}_{c}\ \underbrace{110}_{f}\ \underbrace{01}_{e}\ \underbrace{01}_{e}$

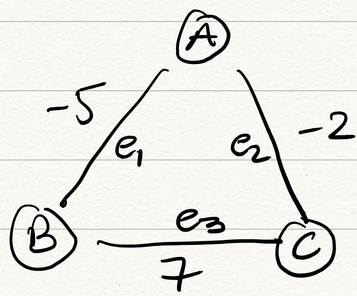
GRAFOS PESADOS

Definición

Sea $G=(V,E)$ un grafo. Sea $w: E \longrightarrow \mathbb{R}$ la aplicación peso. Llamaremos grafo pesado al par (G, w).

Ejemplo





Peso de este grafo es:

$1+2+2+3+5+4+3=20$

$w(e_1) = -5$

$w(e_2) = -2$

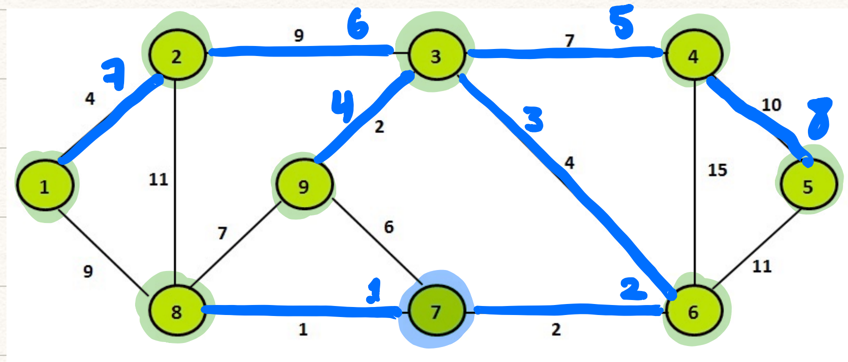
$w(e_3) = 7$

Vamos a buscar un árbol recubridor de peso mínimo:

ALGORITMO DE PRIM

1) Escoger un vértice cualquiera
2) De todos los vértices adyacentes a los actuales elegir el nuevo que tenga menor peso la arista.
3) Repetir 2) hasta que no queden vértices.

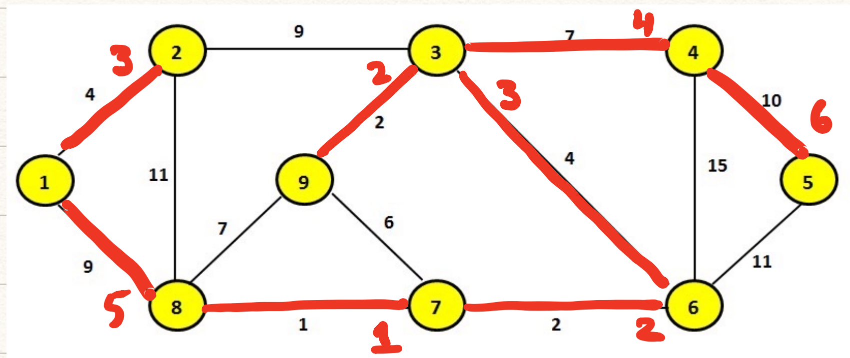
Ejemplo. Peso del árbol $= 1+2+4+2+7+9+4+10 = 39$



ALGORITMO DE KRUSKAL

1) Escoger todas las aristas de peso mínimo que sean válidas, esto es, que respeten la condición de árbol (no tener ciclos)
2) Repetir 1) hasta que todos los vértices tengan una arista que sea incidente

Ejemplo



COLORACIÓN DE GRAFOS

Definición

Sea G un grafo. Definimos una vértice coloración de G como a una asignación de etiquetas (colores) tales que dos vértices adyacentes no pueden tener la misma etiqueta (color)

Nos permite resolver problemas de "organización" entre otros.

Algoritmo voraz: Es un algoritmo heurístico

1) Ordenar los vértices de mayor a menor según sus grados.
2) Colorear del mismo color por orden todos aquellos que no sean adyacente.
3) Repetir 2) con otro color hasta que todos estén coloreados.

Ejemplo

Queremos organizar el espacio de un evento en el cual hay 9 sesiones. Teniendo en cuenta a la hora que están asignadas, ¿cuántas habitaciones necesitaremos y donde ubicaremos las sesiones?

Hora	Charlas
9:00-10:00	1, 2, 3, 4
10:00-11:00	4, 7, 6
11:00-12:00	2, 4, 5, 9
12:00-13:00	5, 8

vértices ≡ charlas
aristas ≡ incompatibilidades

= {4, 8}
= {2, 6}
= {1, 5, 7}
= {3, 9}